

文章编号:1005-3085(2010)05-0947-04

模糊命题演算系统的一个新的等价形式*

马巧云^{1,2}, 吴洪博²

(1- 西安文理学院数学系, 西安 710065; 2- 陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062)

摘 要: 在模糊逻辑系统 \mathcal{L}^* 中, $P \wedge Q$ 是 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ 的简写, 连接词 \wedge 与连接词 \neg, \vee, \rightarrow 的关系应由 \mathcal{L}^* 中的公理体系决定。本文通过在 \mathcal{L}^* 中增加适当公理使得连接词 \wedge 与 \neg, \vee, \rightarrow 具备所需的特殊关系, 得到的主要结论是: 在 \mathcal{L}^* 中增加公理 $L_0^*9_b: (((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C))$, 同时放弃约定“ $P \wedge Q$ 是 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ 的简写”, 所得的系统 \mathcal{L}_0^* 与 \mathcal{L}^* 等价。

关键词: 模糊逻辑; 命题演算; 系统 \mathcal{L}^* ; 等价形式

分类号: AMS(2000) O3B52

中图分类号: O141.1

文献标识码: A

1 引言

模糊推理是模糊逻辑在工程技术中的成功应用, 而模糊推理的基础是模糊命题演算系统^[1,2]。在文献[1]中, 王国俊教授以 \neg, \vee, \rightarrow 为基本连结词建立了模糊命题演算系统 \mathcal{L}^* , 该系统 \mathcal{L}^* 在模糊命题演算系统中具有独特而重要的地位。此后系统 \mathcal{L}^* 经过文献[3,4]的简化, 其公理体系已经趋于完善^[2,3]。文献[2,3]在系统 \mathcal{L}^* 中仍保留了“约定”: $P \wedge Q$ 是 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ 的简写, 而从该“约定”的使用效果和代换定理分析, 这一“约定”实际上等价于在系统 \mathcal{L}^* 中增加了两个公理: $(P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q), \neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q)$ 。本文研究的结果是: 在 \mathcal{L}^* 系统中增加公理 $L_0^*9_b: ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$, 同时放弃该“约定”, 所得系统 \mathcal{L}_0^* 与系统 \mathcal{L}^* 等价。从而进一步完善了模糊命题演算系统 \mathcal{L}^* 。由于篇幅所限, 系统 \mathcal{L}^* 的定义和本文未加定义的符号, 请参见文献[2,3]。

2 模糊命题演算系统 \mathcal{L}_0^* 及其性质

定义 2.1 由以下的公式集 $F(S)$, 公理 $L_0^*1 - L_0^*10$, 推理规则 MP 组成的系统称为模糊命题演算系统 \mathcal{L}_0^* 。

1) 设 $S = \{P_1, P_2, \dots\}$ 是可数无穷集, \neg 是一元算子, $\vee, \rightarrow, \wedge$ 是二元算子。 $F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg, \vee, \rightarrow, \wedge)$ 型自由代数, $F(S)$ 中的元素叫公式。

2) $F(S)$ 中具有以下各种形式的公式为系统 \mathcal{L}_0^* 中的公理。

$$L_0^*1: A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B); \quad L_0^*2: (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B);$$

$$L_0^*3: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C));$$

$$L_0^*4: (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$$

$$L_0^*5: A \rightarrow \neg\neg A; \quad L_0^*6: A \rightarrow (A \vee B); \quad L_0^*7: (A \vee B) \rightarrow (B \vee A);$$

$$L_0^*8: ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C);$$

$$L_0^*9_a: ((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C));$$

收稿日期: 2009-10-28. 作者简介: 马巧云 (1973年9月生), 女, 讲师. 研究方向: 非经典数理逻辑.

*基金项目: 国家自然科学基金 (10871121); 西安文理学院 2008 年中青年专业技术人员科研资助项目 (kyc200819).

$L_0^*9_b: ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C);$

$L_0^*10: (A \rightarrow B) \vee ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)).$

3) 系统 \mathcal{L}_0^* 中的推理规则 MP 为: 由 $A, A \rightarrow B$ 推得 B 。

定义 2.2 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, 系统 \mathcal{L}_0^* 中从 Γ 到 A 的推演是 $F(S)$ 中的公式的有限序列 $A_1, A_2, \dots, A_n, (A_n = A)$, 对任意的 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 或 $A_k \in \Gamma$, 或 A_k 是系统 \mathcal{L}_0^* 中的公理, 或存在于 $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, 使得 A_k 是由 A_i, A_j 通过 MP 规则而得到的公式, 并称 A 是系统 \mathcal{L}_0^* 中的 Γ -结论, 记作 $\Gamma \vdash A$ 。

当 $\Gamma = \emptyset$ 时, 则称 A 为系统 \mathcal{L}_0^* 中的定理, 记作 $\vdash A$, 并称从 Γ 到 A 的推演为定理的证明。

引理 2.1 设 $\{A, B, C\} \subseteq F(S)$, 则

- 1) $\{A, B\} \vdash A \wedge B$; 2) (HS 规则) $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C$; 3) $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$;
4) $\vdash A \rightarrow A$; 5) $\{A\} \vdash A \vee B$; 6) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 。

证明 由公理及 MP 规则直接可证, 略。

引理 2.2 1) $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$; 2) $\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$ 。

证明 1)

1° $(A \rightarrow A) \vee (B \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow A);$

$L_0^*9_b$

2° $A \rightarrow A$;

引理 2.1 4)

3° $(A \rightarrow A) \vee (B \rightarrow A);$

2°, 引理 2.1 5)

4° $(A \wedge B) \rightarrow A$;

1°, 3°, MP

2) 类似 1) 的证明, 略。

引理 2.3 1) $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$; 2) $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ 。

证明 1)

1° $\neg \neg A \rightarrow A$;

引理 2.1 3)

2° $(\neg \neg A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow \neg B));$

引理 2.1 6)

3° $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow \neg B);$

1°, 2°, MP

4° $(\neg \neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A);$

L_0^*2

5° $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ 。

3°, 4°, HS

2) 类似 1) 的证明, 略。

引理 2.4 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 。

证明 由公理, 引理 2.3 及 MP, HS 规则直接可证, 略。

引理 2.5 1) $\vdash A \rightarrow (T \rightarrow A)$; 2) $\{T\} \vdash (T \rightarrow A) \rightarrow A$ 。

证明 1)

1° $A \rightarrow (T \rightarrow (A \wedge T));$

L_0^*1

2° $(A \wedge T) \rightarrow A$;

引理 2.2

3° $((A \wedge T) \rightarrow A) \rightarrow ((T \rightarrow (A \wedge T))) \rightarrow (T \rightarrow A);$

L_0^*4

4° $(T \rightarrow (A \wedge T)) \rightarrow (T \rightarrow A);$

2°, 3°, MP

5° $((T \rightarrow (A \wedge T)) \rightarrow (T \rightarrow A))$

$\rightarrow ((A \rightarrow (T \rightarrow (A \wedge T))) \rightarrow (A \rightarrow (T \rightarrow A)));$

L_0^*4

6° $(A \rightarrow (T \rightarrow (A \wedge T))) \rightarrow (A \rightarrow (T \rightarrow A));$

4°, 5°, MP

7° $A \rightarrow (T \rightarrow A)$ 。

1°, 6°, MP

2) 类似 1) 的证明, 略。

引理 2.6 1) $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg T)$; 2) $\{T\} \vdash (A \rightarrow \neg T) \rightarrow \neg A$ 。

证明 1)

- 1° $\neg A \rightarrow (\top \rightarrow \neg A)$; 引理 2.5
 2° $(\top \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg \top)$; 引理 2.3
 3° $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg \top)$; 1°, 2°, HS
 2) 类似 1) 的证明, 略。

引理 2.7 $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \vdash (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$ 。

证明

- 1° $A \rightarrow B$; 假设
 2° $B \rightarrow (B \vee D)$; L_0^*6
 3° $A \rightarrow (B \vee D)$; 1°, 2°, HS
 4° $C \rightarrow D$; 假设
 5° $D \rightarrow (D \vee B)$; L_0^*6
 6° $(D \vee B) \rightarrow (B \vee D)$; L_0^*7
 7° $C \rightarrow (B \vee D)$; 4°, 5°, 7°, HS
 8° $(A \rightarrow (B \vee D)) \wedge (C \rightarrow (B \vee D))$; 3°, 8°, 引理 2.1 1)
 9° $(A \rightarrow (B \vee D)) \wedge (C \rightarrow (B \vee D)) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$; L_0^*8
 10° $(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$; 9°, 10°, MP

引理 2.8 $\vdash (A \wedge B) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ 。

证明

- 1° $(A \rightarrow \neg \top) \vee (B \rightarrow \neg \top) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow \neg \top)$; L_0^*9b
 2° \top 为 $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$; L_0^*1
 3° $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg \top)$, $\neg B \rightarrow (B \rightarrow \neg \top)$; 2°, 引理 2.6
 4° $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg \top) \vee (B \rightarrow \neg \top))$; 3°, 引理 2.7
 5° $((A \wedge B) \rightarrow \neg \top) \rightarrow \neg(A \wedge B)$; 2°, 引理 2.5
 6° $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$; 4°, 1°, 5°, HS
 7° $((\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B))$; 引理 2.3 1)
 8° $(A \wedge B) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$; 6°, 7°, MP

引理 2.9 $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$ 。

证明

- 1° $((A \wedge B) \rightarrow \neg \top) \rightarrow ((A \rightarrow \neg \top) \vee (B \rightarrow \neg \top))$; L_0^*9a
 2° \top 为 $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$; L_0^*1
 3° $\neg(A \wedge B) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow \neg \top)$; 2°, 引理 2.6
 4° $(A \rightarrow \neg \top) \rightarrow \neg A$, $(B \rightarrow \neg \top) \rightarrow \neg B$; 2°, 引理 2.6
 5° $((A \rightarrow \neg \top) \vee (B \rightarrow \neg \top)) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$; 4°, 引理 2.7
 6° $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$; 3°, 1°, 5°, HS
 7° $(\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$; 引理 2.4
 8° $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$; 6°, 7°, MP

由已证明的引理、公理以及推理规则, 很容易得到以下三个引理, 证明从略。

引理 2.10 $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ 。

引理 2.11 $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$ 。

引理 2.12 $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ 。

定理 2.1 在 \mathcal{L}_0^* 系统中, $A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$, 即 $\vdash (A \wedge B) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ 且 $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$ 。

证明 由引理 2.8, 引理 2.9 直接可得。

3 系统 \mathcal{L}^* 与系统 \mathcal{L}_0^* 的关系

引理 3.1 系统 \mathcal{L}_0^* 是系统 \mathcal{L}^* 的扩张。

证明 由于系统 \mathcal{L}^* 中的公理是系统 \mathcal{L}_0^* 的公理, 且由定理 2.1 知, 在系统 \mathcal{L}_0^* 中 $A \wedge B$ 与 $\neg(\neg A \vee \neg B)$ 可证等价, 即 \mathcal{L}^* 中的 $A \wedge B$ 是 $\neg(\neg A \vee \neg B)$ 的简写在 \mathcal{L}_0^* 中是定理。因此系统 \mathcal{L}^* 中的定理皆为系统 \mathcal{L}_0^* 中的定理, 从而系统 \mathcal{L}_0^* 是系统 \mathcal{L}^* 的扩张。

引理 3.2 系统 \mathcal{L}^* 是系统 \mathcal{L}_0^* 的扩张。

证明 由参考文献 [2,3] 知, \mathcal{L}_0^* 中的公理 $L_0^*9_b$ 是 \mathcal{L}^* 中的定理, 从而 \mathcal{L}_0^* 中的定理皆为 \mathcal{L}^* 中的定理, 因此 \mathcal{L}^* 是 \mathcal{L}_0^* 的扩张。

定理 3.1 系统 \mathcal{L}_0^* 与系统 \mathcal{L}^* 是两个等价的模糊命题演算系统。

证明 这是引理 3.1, 引理 3.2 的直接结果。

参考文献:

- [1] 王国俊. 模糊命题的一种形式演绎系统[J]. 科学通报, 1997, 42(10): 1041-1045
Wang G J. A kind of formal deductive system for fuzzy proposition[J]. Science Bulletin, 1997, 42(10): 1041-1045
- [2] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2008
Wang G J. Non-classical Mathematical Logical and Approximation Reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2008
- [3] Wu H B. A kind of simplified formal deductive system \mathcal{L}_0^* for the system \mathcal{L}^* [J]. Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(2): 365-371
- [4] 何颖俞, 王国俊. \mathcal{L}^* -Lindebaum 代数的结构与 \mathcal{L}^* 公理系统的简化形式[J]. 工程数学学报, 1998, 15(1): 1-8
He Y Y, Wang G J. On the structure of \mathcal{L}^* -Lindebaum algebra and a simplified system of axioms for \mathcal{L}^* [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1998, 15(1): 1-8
- [5] 吴洪博, 王晓敏, 韩诚. \mathcal{L}^* 系统中模糊演绎定理的改进形式[J]. 四川大学学报, 2005, 42(1): 27-32
Wu H B, Wang X M, Han C. An improved form of fuzzy deduction theorem in the System \mathcal{L}^* [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science), 2005, 42(1): 27-32

A New Equivalent Form of the Fuzzy Logic System

MA Qiao-yun^{1,2}, WU Hong-bo²

(1- Department of Mathematics, Xi'an Science and Artical University, Xi'an 710065;

2- College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: $P \wedge Q$ is the abriviation of $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in the fuzzy logic system \mathcal{L}^* . The relation between the connection words \wedge and \neg, \vee, \rightarrow should be determined by the axiom system in \mathcal{L}^* . In this paper, \wedge has a suitable relationship with \neg, \vee, \rightarrow by adding axioms in \mathcal{L}^* . It is the main result of this paper that the system \mathcal{L}^* is equivalent to the system \mathcal{L}_0^* which is obtained by adding the axiom $L^*9_b(((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C))$ to the system \mathcal{L}^* and discarding the convention that $P \wedge Q$ is the abriviation of $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ from the system \mathcal{L}^* .

Keywords: fuzzy logic; propositional calculus; the system \mathcal{L}^* ; equivalent form

Received: 28 Oct 2009. **Accepted:** 09 Apr 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10871121); the Professional and Technical Personnel of Young and Middle Aged Science Foundation of Xi'an Science and Article University (kyc200819).